



**Direttore Responsabile**

Valeria DE PAOLA

**Editorial Board**

Milena MORETTI - Editor in Chief (milena.moretti@ingv.it)

Raffaele AZZARO (raffaele.azzaro@ingv.it)

Christian BIGNAMI (christian.bignami@ingv.it)

Viviana CASTELLI (viviana.castelli@ingv.it)

Rosa Anna CORSARO (rosanna.corsaro@ingv.it)

Luigi CUCCI (luigi.cucci@ingv.it)

Domenico DI MAURO (domenico.dimauro@ingv.it)

Mauro DI VITO (mauro.divito@ingv.it)

Marcello LIOTTA (marcello.liotta@ingv.it)

Mario MATTIA (mario.mattia@ingv.it)

Nicola PAGLIUCA (nicola.pagliuca@ingv.it)

Umberto SCIACCA (umberto.sciacca@ingv.it)

Alessandro SETTIMI (alessandro.settimi1@istruzione.it)

Andrea TERTULLIANI (andrea.tertulliani@ingv.it)

**Segreteria di Redazione**

Francesca DI STEFANO - Coordinatore

Rossella CELI

Robert MIGLIAZZA

Barbara ANGIONI

Massimiliano CASCONI

Patrizia PANTANI

Tel. +39 06 51860068

redazione@ingv.it

**REGISTRAZIONE AL TRIBUNALE DI ROMA N.174 | 2014, 23 LUGLIO**

© 2014 INGV Istituto Nazionale

di Geofisica e Vulcanologia

Rappresentante legale: Carlo DOGLIONI

Sede: Via di Vigna Murata, 605 | Roma



ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA E VULCANOLOGIA

# MISCELLANEA

# INGV

## Condensatori, proiettili ed altri mostri energofagi

Giovanni Romeo

INGV | Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

Accettato 13 giugno 2022 | *Accepted* 13 June 2022

Come citare | *How to cite* Romeo G., (2022). Condensatori, proiettili ed altri mostri energofagi. Misc. INGV, 72: 1-28,  
<https://doi.org/10.13127/misc/72>

In copertina | *Cover* Comportamento del proiettile nel bersaglio in un mondo elastico

72



# INDICE

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1. Il mistero dei condensatori energofagi</b>	<b>7</b>
<b>2. I motori sono condensatori</b>	<b>10</b>
<b>3. Proiettili</b>	<b>13</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>16</b>
<b>Sitografia</b>	<b>16</b>
<b>Appendici</b>	<b>17</b>
<b>A1. Azionamento di un motore con recupero della frenata</b>	<b>19</b>
<b>A2. Il pendolo di Newton</b>	<b>21</b>



## Introduzione

Questa nota parte da reminiscenze liceali proponendo problemi apparentemente semplici, relativi alla conservazione dell'energia in circuiti elettrici o dispositivi meccanici. Vengono esaminate misteriose (apparentemente) perdite di energia che nascono collegando insieme condensatori o avviando motori, e vengono paragonate a quelle di un pendolo balistico o di un pendolo di Newton. Si esaminano trucchi per il trasferimento di energia senza perdite sia in modelli elettrici che meccanici.

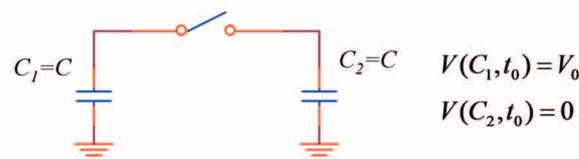
Il risparmio energetico è un tema particolarmente sentito negli esperimenti su pallone stratosferico per l'osservazione della Terra e dello spazio, dove una minor efficienza si traduce in maggior peso e, quindi maggior costo o minore autonomia. L'efficienza energetica nelle osservazioni scientifiche da pallone è il tema che ha portato alla scrittura della nota.

Spero tanto che, nel leggerla, il lettore si diverta almeno quanto mi sono divertito io nello scriverla.

Keywords Circuito LC; Pendolo di Newton; Pendolo balistico | LC circuit; Newton pendulum; Ballistic pendulum

## 1. Il mistero dei condensatori energofagi

Facevo il quinto anno del liceo, ed ero quello bravo in fisica (almeno lo credevo, ma lo credevano anche gli altri ed era confortante). Il compito in classe (che adesso si chiama verifica (per qualche motivo cambiare i nomi delle cose viene spacciato per innovazione)) proponeva una cosa facile facile (Figura 1).



**Figura 1** Il compito in classe: a che tensione si portano i due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  (il primo carico alla tensione  $V_0$ , il secondo scarico) quando li metto in parallelo chiudendo l'interruttore?

C'erano due condensatori identici, di capacità  $C$ , uno carico (ad una tensione  $V_0$ ) ed uno scarico. La domanda, angelicamente innocente, chiedeva: "a che tensione si mettono i condensatori se li colleghiamo in parallelo"?

Beh, da quando era stato aperto il primo volume del corso (P. Silva, 3 volumi, si faceva fisica dal 3° anno del Liceo Scientifico) una cosa era apparsa chiara ed inequivocabile: l'energia si conserva. Il circuito non conteneva resistori che potessero dissipare energia e quindi sarebbe bastato applicare la legge di conservazione per ottenere la soluzione del problema.

L'energia di un condensatore dipende dalla capacità  $C$  e dalla tensione,  $V$ :

$$E = \frac{1}{2} CV^2 \quad (1)$$

Dopo aver messo in parallelo i due condensatori la capacità sarebbe raddoppiata, divenendo  $2C$  e quindi sarebbe bastato risolvere l'equazione in  $V_x$ :

$$\frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} 2CV_x^2 \quad (2)$$

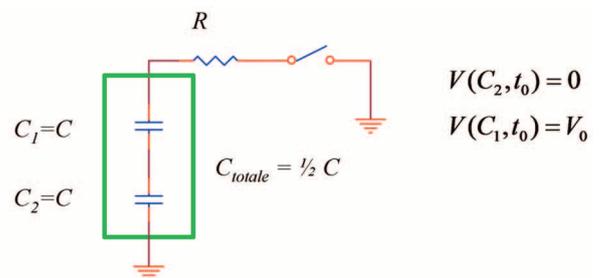
per trovare la soluzione. Nell'equazione a sinistra appare l'energia prima del collegamento del secondo condensatore, a destra dopo il collegamento. La tensione finale che si trova risolvendo la (2) è:

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2}}V_0$$

Questo è ciò che fieramente scrissi come risultato dell'esercizio. Be', non era così. La docente mi redarguì dicendo che avrei dovuto conservare la carica invece dell'energia, e, in questo caso la risposta sarebbe stata ancora più banale: capacità doppia, stessa carica, tensione metà. Questo voleva dire che metà dell'energia era andata via. In qualche modo mi sentivo tradito dalla legge di conservazione dell'energia. Aveva dei limiti? Come decido quando la posso usare e quando no? Dove era andata quella metà di energia? Su un foglio di carta tutte le parti sono ideali, e non potevo essere tentato di attribuire una così evidente perdita di energia (la metà!) ad una inadeguata realizzazione sperimentale. Certo, conservare la carica aveva un'aria più robusta. In fondo le cariche sono oggetti materiali, e tali rimangono a dispetto delle trasformazioni; l'energia è più mutevole e ballerina, cambia natura, ed è facile che spifferi via in una forma difficile da verificare. Sì, l'energia si conserva, ma lo fa nel modo che preferisce lei, che non è detto sia quello che preferisci tu. La risposta della docente alle mie rimostranze sul tradimento della conservazione fu una vaga "l'energia perduta va in energia termica". Ma perché proprio metà? Poi quello disegnato sul foglio di carta era un conduttore ideale, come si può dissipare qualcosa su una resistenza nulla?

La giustificazione è arrivata più tardi, tra i banchi della Sapienza, mentre imparavo a destreggiarmi tra i circuiti. La spiegazione più semplice (mi piace perché non richiede calcoli) consiste nel disegnare il circuito in un altro modo (Figura 2), a dimostrazione di quanto sia utile guardare le cose da differenti angolazioni. Nella Figura 2 appare la resistenza  $R$ , che simboleggia dei conduttori non ideali. Non è pericolosa, se vogliamo possiamo sempre porla uguale a zero.

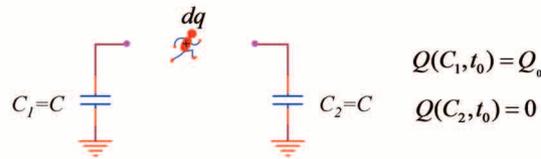
Figura 2 Il circuito di Figura 1 ridisegnato.



A parte la posizione del riferimento (è un vezzo di coloro che disegnano circuiti porre un punto a potenziale nullo da usare come riferimento) che è del tutto arbitrario, i due circuiti sono equivalenti e quando chiudiamo l'interruttore mettiamo comunque i due condensatori in parallelo. In Figura 2 il rettangolo verde che racchiude i due condensatori evidenzia che i condensatori sono in serie e si comportano come un singolo condensatore di capacità totale  $\frac{1}{2} C$ . Siccome il condensatore  $C_2$  è scarico la tensione ai capi di  $C_{totale}$  è sempre  $V_0$ . Quindi, dall'esterno del rettangolo verde vediamo un condensatore con la stessa tensione del condensatore  $C_1$ , ma di

metà capacità, e che contiene, quindi, metà energia. Quando chiudiamo l'interruttore tutta l'energia di  $C_{totale}$  viene dissipata sul resistore in un tempo dell'ordine di  $C_{totale} R$ . Il valore di  $R$  non conta sulla quantità di energia che verrà dissipata, ma influisce soltanto sul tempo che ci metterà a farlo. Se  $R = 0$  il tempo sarà infinitamente piccolo, e la corrente infinitamente grande, ma l'energia dissipata non cambierà.

Potremmo approssciare lo studio del fenomeno da un punto di vista un po' più fisico e nobilitarlo con un po' di matematica, immaginando l'esperimento descritto in Figura 3a.



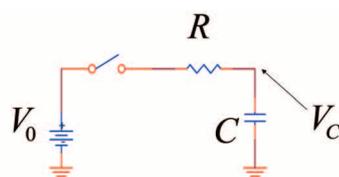
**Figura 3a** Ci sono due condensatori affiancati ( $C_1$  e  $C_2$ ). Il condensatore  $C_1$ , carico, perde cariche che accelerano fino a raggiungere il condensatore  $C_2$ . Il fenomeno si mantiene finché le cariche sui condensatori non si eguagliano e il campo elettrico tra i due condensatori diventa nullo.

La Figura 3a mostra due condensatori identici di capacità  $C$ .  $C_1$ , quello a sinistra, carico con una carica  $Q_0$ , che lo mette al potenziale  $V_0$ , emette cariche che, immerse nel campo elettrico formato dalla differenza di potenziale dei due condensatori, arrivano al condensatore  $C_2$ . Ogni carica acquista energia accelerata dal campo, che perde all'impatto, quando si spiccica sul condensatore  $C_2$ . Il fenomeno continua finché esiste una differenza di potenziale tra i due condensatori in grado di muovere le cariche. Quando queste sono identiche (abbiamo trasferito  $Q/2$  da un condensatore all'altro) il fenomeno di trasporto cessa. Quanta energia abbiamo impegnato per far questo?

$$E_{trasferita} = \int_0^{Q_0/2} \left( \frac{Q_0 - q}{C} - \frac{q}{C} \right) dq = \frac{1}{C} \left( Q_0 q - q^2 \right) \Big|_0^{Q_0/2} = \frac{1}{C} \frac{Q_0^2}{4} = \frac{1}{4} C V_0^2 \tag{3}$$

Nell'integrale (3) il termine  $(Q_0 - q)/C$  rappresenta il potenziale del condensatore  $C_1$ , al quale sottraiamo la carica  $q$ , mentre il termine  $q/C$  rappresenta il potenziale del condensatore  $C_2$  al quale la stessa carica viene sommata; la differenza dei due termini è la differenza di potenziale che accelera le cariche nel passare da un condensatore all'altro. Il risultato mostra che l'energia fornita alle cariche per muoversi, e che viene persa all'impatto è esattamente metà dell'energia originale del condensatore  $C_1$ .

Questa fastidiosa regola della perdita di metà energia ce la portiamo dietro nel nostro quotidiano (di progettisti elettronici). Che cosa succede se vogliamo caricare un condensatore da una sorgente di tensione? In Figura 3b appare l'innocente circuito di un condensatore caricato da un generatore attraverso una resistenza.



**Figura 3b** Il generatore  $V_0$  carica il condensatore  $C$  attraverso la resistenza  $R$ , secondo la legge descritta nella (4).

Ora ogni studente ricorda che la tensione sul condensatore, quando chiudo l'interruttore ha la forma (4):

$$V_C(t) = V_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (4)$$

E quindi, il condensatore si carica e la tensione ai suoi capi tende asintoticamente alla tensione  $V_0$ . Sulla resistenza la tensione è:

$$V_R(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5)$$

Domandiamoci quanta energia si dissipa sulla resistenza nel processo di carica del condensatore. Per far questo basta integrare l'espressione della potenza  $V(t)^2/R$  per il tempo, dal momento della chiusura dell'interruttore all'infinito. Otteniamo:

$$E = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} V_0^2 e^{-\frac{t}{RC}} dt = \frac{1}{R} \frac{RCV_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}}}{-2} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2} CV_0^2 \quad (6)$$

Oops! Pare proprio che questo vizio di perdere metà energia ci perseguiti. Sulla resistenza perdiamo esattamente quanto siamo riusciti a mandare nel condensatore. E questo sperpero si applica solo ai condensatori o si nasconde anche in altri apparentemente innocenti oggetti quotidiani? E si tratta di uno sperpero legato solo al mondo dell'elettricità o sconfinava anche, che so, nella meccanica? Ed esiste un modo per caricare un condensatore in modo meno prodigo?

La risposta a tutte queste domande è sì.

## 2. I motori sono condensatori

Il motore elettrico congiunge il mondo dell'elettricità a quello della meccanica. Un motore elettrico è una macchina che trasforma elettricità in movimento e viceversa (Figura 4). Più precisamente può trasformare una corrente elettrica in una forza (o una coppia, di solito i motori fanno girare qualcosa o vengono fatti girare da qualcosa) e una velocità (o una velocità angolare) in una tensione. Che cosa succede quando colleghiamo un motore ad un generatore di tensione? Se il motore è fermo la tensione ai suoi capi è nulla, e nel motore scorre una corrente (la tensione del generatore diviso la resistenza dei conduttori e degli avvolgimenti) che genera una coppia che fa aumentare la velocità del motore. Quando il motore gira produce una tensione che si sottrae dalla tensione applicata. Quando la eguaglia la corrente smette di fluire e la velocità del motore non aumenta più. L'energia che abbiamo fornito sotto forma di elettricità è divenuta energia cinetica del motore e, in un mondo ideale senza attriti, la tensione indotta dalla velocità permane sui morsetti di alimentazione del motore finché non decidiamo di prelevarla sotto forma di corrente. Questo genera nel motore una coppia che ne frena la velocità (la corrente che preleviamo ha il segno opposto a quella che abbiamo usato per "caricare" il motore) fino a fermarlo.

Il motore è divenuto una sorta di accumulatore elettromeccanico, praticamente un condensatore [[https://en.wikipedia.org/wiki/Flywheel\\_energy\\_storage](https://en.wikipedia.org/wiki/Flywheel_energy_storage)], [M.E. Amiryar and K.R. Pullen, 2017]. Questo motore attaccato a nulla (o semplicemente ad un volano) ha delle applicazioni pratiche in campo spaziale sia per l'assetto dei satelliti [[https://en.wikipedia.org/wiki/Reaction\\_wheel](https://en.wikipedia.org/wiki/Reaction_wheel)] che per quello dei palloni stratosferici [Pascale and Boscaleri, 2002; A. Lange et al., 1995].

Il motore elettrico può trasformare la corrente in una forza

$$\vec{f} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

$$v = \frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})$$

Il motore elettrico può trasformare la velocità in una tensione

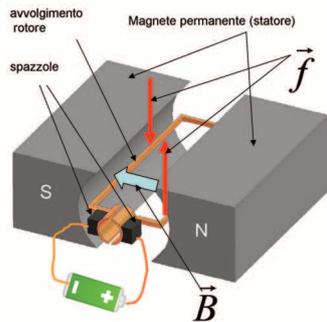


Figura 4 Il motore elettrico utilizza gli effetti magnetici della corrente elettrica per trasformare elettricità in movimento e viceversa.

Un condensatore ed un motore sono descritti dalle stesse equazioni, cambia solo il significato dei simboli:

$$dV(t) = \frac{1}{C} I(t) dt \tag{7}$$

$$d\omega(t) = \frac{1}{M} T(t) dt = \frac{k}{M} I(t) dt \tag{8}$$

La (7) è la legge che descrive un condensatore: la tensione  $V(t)$  è proporzionale alla corrente  $I(t)$  per il tempo. La (8) descrive come la velocità angolare  $\omega(t)$  sia proporzionale al rapporto coppia / momento di inerzia  $I(t)/M$ . La tensione generata dal motore è proporzionale alla velocità; si può dimostrare che il coefficiente di proporzionalità tensione/velocità ha lo stesso valore del  $k$  introdotto nella (8), [G. Romeo e T. Braun, 1987, pag. 32] quindi possiamo modificare la (8) così:

$$dV(t) = \frac{k^2}{M} I(t) dt \tag{9}$$

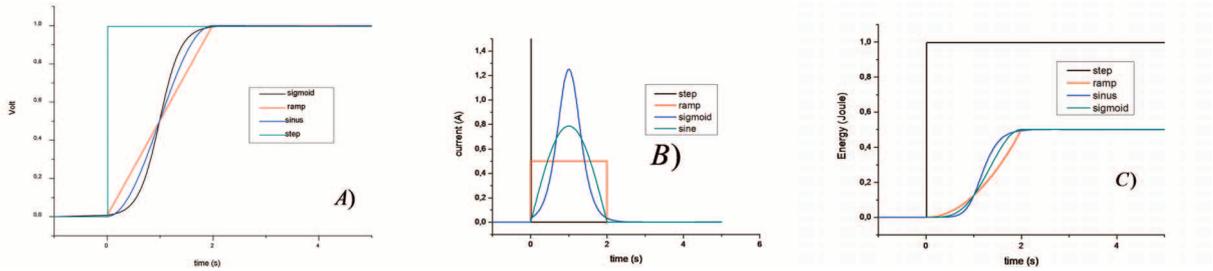
Confrontando la (9) con la (7) notiamo che sono identiche se si pone  $C = \frac{M}{k^2}$ .

Elettricamente, quindi, un motore si comporta come un condensatore di capacità  $M/k^2$ . La prima implicazione che abbiamo è che, se avviamo un motore, anche se privo di carico, l'energia che perdiamo sugli avvolgimenti in energia termica è esattamente la stessa di quella che siamo riusciti ad immagazzinare sotto forma di energia cinetica del rotore in rotazione. Anche questa volta abbiamo perso metà dell'energia. Anche il motore soffre di energofagia.

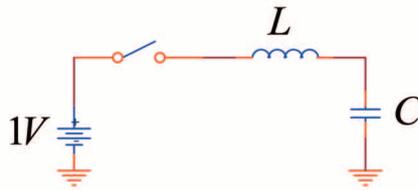
Ma esiste un *escamotage* che ci permetta di evitare questo sperpero? Sì. Se decidessimo di caricare il condensatore con un generatore di corrente non ci scontreremmo con inquietanti prodotti di resistenze nulle con correnti infinite. Se insistiamo ad usare un generatore di tensione dovremo fornire una tensione variabile che impedisca il divergere della corrente. Qualunque funzione con una crescita lenta va bene. La Figura 5 mostra il risultato di una simulazione dove un condensatore da  $1F$  viene caricato alla tensione di  $1V$  utilizzando un gradino, una rampa, un segmento di senoide ed una sigmoide.

Il pinnacolo di corrente a  $t=0$  in Figura 5 B) eccede le dimensioni del diagramma (nella simulazione era di alcuni MA) e si traduce, nel diagramma C) in un'energia doppia di quella necessaria a portare il condensatore a  $1V$ ,  $1/2J$ , alla quale invece convergono tutti i generatori con un incremento morbido. Questo ci convince che, quando vediamo un motore avviato con *soft-start*, non siamo davanti ad una scelta esclusivamente cosmetica ma energetica. Ovviamente la generazione dei segnali morbidi con cui caricare il condensatore (o avviare il motore) deve essere ottenuta con metodi non dissipativi. Se usassimo una resistenza variabile l'odiosa regola della perdita della

metà dell'energia si riproporrebbe. Il modo più semplice per ottenere questo è quello di porre un induttore in serie al condensatore da caricare, come illustrato nel circuito di Figura 6.



**Figura 5** Il risultato di una simulazione in cui tentiamo di caricare un condensatore con un gradino, una rampa, una sigmoide ed un segmento di sinusoide. In A) sono riportati i segnali dei generatori; in B) le correnti; in C) le energie erogate.



**Figura 6** Un induttore in serie al condensatore ci aiuta a caricare il condensatore senza perdite energetiche.

La tensione di uscita del circuito di Figura 6, usando la trasformata di Laplace è:

$$V(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 LC + 1} \quad (10)$$

dove il termine  $1/s$  descrive l'eccitazione a gradino, mentre il termine  $1/(s^2 LC + 1)$  è la funzione di trasferimento del circuito  $LC$ .

La risposta nel tempo del circuito (abbiamo antitrasformato la (10)) è:

$$V(t) = 1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{1}{LC}}\right) \quad (11)$$

La corrente nell'induttore è l'integrale della tensione sull'induttore nel tempo e la tensione sull'induttore è la (*tensione di ingresso*) - (*tensione di uscita*):

$$i(t) = \int_0^t \left(1 - \left(1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)\right)\right) dt = \sqrt{LC} \sin\left(t\sqrt{\frac{1}{LC}}\right) \quad (12)$$

L'energia che forniamo al condensatore è l'integrale nel tempo del prodotto *tensione*·*corrente*:

$$E_c(t) = \int_0^t \sqrt{LC} \sin\left(t\sqrt{\frac{1}{LC}}\right) \left(1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)\right) dt = 2CL \sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{CL}}\right) + \frac{CL}{2} \left(\cos^2\left(t\sqrt{\frac{1}{CL}}\right) - 1\right) \quad (13)$$

Mentre l'energia che forniamo al circuito è la tensione (unitaria) per la corrente integrata nel tempo:

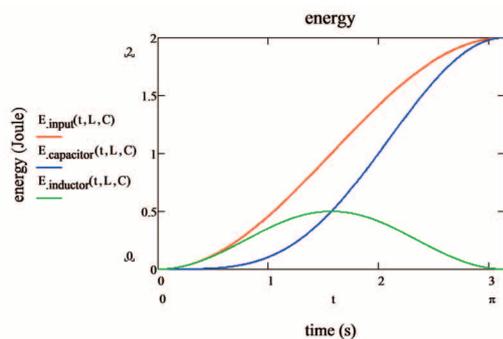
$$E_{input}(t) = \int_0^t \sqrt{CL} \sin\left(t \sqrt{\frac{1}{CL}}\right) dt = 2CL \sin^2\left(\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{CL}}\right) \quad (14)$$

L'energia sull'induttanza è:

$$E_{inductor}(t) = L \frac{1}{2} i(t)^2 \quad (15)$$

Come vediamo dalle equazioni, e come ci saremmo aspettati da un circuito LC, gli andamenti delle varie grandezze in gioco sono oscillanti, ma esiste un momento in cui (in realtà una infinità di momenti, visto che la risposta è periodica, ma noi ci accontentiamo del primo), dopo la chiusura dell'interruttore di Figura 6, l'energia fornita dal generatore uguaglia quella sul condensatore al momento  $t = \pi \sqrt{LC}$ . Quindi è sufficiente aprire l'interruttore al momento giusto perché tutta l'energia fornita venga a trovarsi sul condensatore.

In Figura 7 è mostrato il diagramma di andamento dell'energia al momento della chiusura dell'interruttore. Per tracciare il diagramma sono stati posti  $L=1H$  e  $C=1F$ . Alla fine del diagramma, per  $t = \pi \sqrt{LC}$ , tutta l'energia sull'induttore è stata completamente trasferita al condensatore. Se, in questo momento apriamo l'interruttore abbiamo ottenuto di aver caricato il condensatore senza sprechi energetici. Allo stesso modo avremmo evitato sprechi nell'avviamento di un motore.



**Figura 7** Andamento delle energie del circuito di Figura 6 a partire dal momento della chiusura dell'interruttore. La traccia rossa indica l'energia inviata in ingresso, quella blu l'energia sul condensatore, quella verde l'energia nell'induttore.

L'impiego combinato di induttori e condensatori è usatissimo nell'elettronica di potenza (alimentatori, controllo di motori, etc.). In Appendice A1 si trova una sequenza di avviamento ed arresto di un motore con recupero dell'energia.

C'è da considerare che le tecniche costruttive dei motori ci vengono incontro: alla base di ogni motore c'è un avvolgimento che interagisce con un campo magnetico, e ogni avvolgimento è anche un induttore. Una progettazione accorta può far sì che questo induttore sia esso stesso parte di un sistema di alimentazione energeticamente efficiente.

### 3. Proiettili

Esiste un metodo semplice per valutare la velocità di un proiettile senza sofisticati metodi di tragguardazione elettronici. È il pendolo balistico, inventato oltre 250 anni fa, che si basa sul trasferimento della quantità di moto di un proiettile ad un bersaglio, in questo caso un pendolo. Quando il proiettile colpisce il pendolo, in un urto perfettamente anelastico, porta il pendolo ad oscillare. Dall'ampiezza delle oscillazioni indotte sul pendolo si può ricavare, conoscendone la massa, la velocità del proiettile. Il calcolo è semplice. Se assumiamo che la quantità di moto si

conservi dobbiamo avere:

$$mv = (m + M)V \quad (16)$$

Dove:

$m$  massa del proiettile

$M$  massa del pendolo

$v$  velocità del proiettile

$V$  velocità del pendolo (con il proiettile conficcato)

Dalla 16 è possibile ricavare la velocità del proiettile a partire dalla velocità del pendolo, che a sua volta può essere determinata assumendo che l'energia cinetica del pendolo,  $\frac{1}{2}(M+m)V^2$ , diventi energia potenziale quando il pendolo raggiunge la sua massima oscillazione, e l'altezza raggiunta o l'angolo sono facili da misurare direttamente. Anche qui sembra che l'energia faccia una brutta fine. Se la massa del proiettile e del pendolo sono identiche,  $m$ , la (16) diventa:

$$mv = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{1}{2}v \quad (17)$$

Dopo l'impatto la massa che si muove è raddoppiata, la velocità dimezzata. Siccome l'energia cinetica va col quadrato della velocità, dopo l'impatto abbiamo perso metà dell'energia. La storia dei due condensatori si ripropone nella sua forma meccanica, e metà dell'energia se ne è andata. C'è una certa analogia tra le masse che collidono ed i condensatori che si scambiano le cariche (Tabella 1) ed anche qui c'è una quantità che, come la carica, si conserva a dispetto di tutto: la quantità di moto. Al contrario l'energia, volatile come sempre, sfuma in energia termica. C'è un modo per giustificare meccanicamente il comportamento delle masse che collidono. Immaginiamo di essere in un mondo perfetto, in cui tutti gli urti siano elastici. In questo mondo due corpi che collidono rimbalzano perfettamente, e vengono rispettati contemporaneamente la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia cinetica.

	elettrica	meccanica
Energia	$\frac{1}{2} CV^2$	$\frac{1}{2} mv^2$
Capacità   massa	$C$	$m$
Tensione   velocità	$V$	$v$
Carica   quantità di moto	$q$	$mv$

**Tabella 1** Analogia elettrica e meccanica.

Ipotizziamo sempre che le masse del proiettile e del bersaglio,  $m$ , siano identiche e che una delle due (il bersaglio) sia ferma. Le variabili che trattiamo sono:

$v_{pi}$  velocità iniziale del proiettile

$v_{pf}$  velocità finale del proiettile

$v_{bi}$  velocità iniziale del bersaglio (= 0)

$v_{bf}$  velocità finale del bersaglio

$m$  massa del proiettile = massa del bersaglio

Le equazioni che risolvono il problema sono:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_{pi}^2 = \frac{1}{2} m v_{pf}^2 + \frac{1}{2} m v_{bf}^2 \\ m v_{pi} = m v_{pf} + m v_{bf} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{pi}^2 = v_{pf}^2 + v_{bf}^2 \\ v_{pi} = v_{pf} + v_{bf} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{bf} = v_{pi} \\ v_{pf} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Esse ci mostrano come tutta l'energia del proiettile venga trasferita al bersaglio che, dopo l'impatto, si muoverà alla velocità del proiettile prima dell'impatto, mentre il proiettile si fermerà. Queste sono le equazioni che descrivono il funzionamento del pendolo di Newton a due pesi (Appendice A2).

Come simulare l'urto anelastico in un mondo elastico? In un urto anelastico non ci sono parti che rimbalzano e, dopo l'impatto bersaglio e proiettile si comportano come un solido unico. In pratica quando il proiettile colpisce il bersaglio scompare dentro di esso e da fuori possiamo percepire il comportamento dell'insieme proiettile + bersaglio senza occuparci del dettaglio delle loro interazioni. Un modo per rappresentare questo comportamento è quello della Figura 8. Nella fase 0) di Figura 8 il proiettile entra nella porticina di una scatola che si chiude subito dopo alle sue spalle. Il proiettile arriva sul fondo della scatola e, siccome ha la stessa massa della scatola e l'urto è perfettamente elastico, per le (18), trasferisce tutta la sua energia cinetica alla scatola che comincia a muoversi alla stessa velocità che aveva il proiettile, mentre il proiettile si ferma (fase 1). Il proiettile rimane fermo finché il lato opposto della scatola (quello dove prima si trovava la porta) non lo colpisce, trasferendogli di nuovo tutta l'energia, la scatola si ferma ed il proiettile comincia di nuovo a muoversi (fase 2). Entrambi gli oggetti possono assumere le velocità  $v=v_0$  e  $v=0$ . Quando il proiettile avanza la scatola sta ferma e viceversa. Il periodo di questa oscillazione è pari a 2 volte distanza tra le pareti della scatola  $l$  diviso la velocità. Un osservatore vedrà la scatola muoversi a velocità  $v_0$  per un tempo  $l/v_0$  e poi fermarsi sempre per un tempo  $l/v_0$ . La velocità media della scatola percepita dall'esterno è  $v_0/2$ , esattamente quella che avrebbe avuto il sistema proiettile più bersaglio in un urto anelastico nel mondo reale. Le fasi 3 e 4 si ripetono all'infinito; un osservatore posto nella scatola vedrà il proiettile rimbalzare ripetutamente tra le due pareti, mentre un osservatore esterno vedrà la scatola spostarsi, con un movimento granuloso ma rispettoso, in media, della legge di conservazione della quantità di moto.

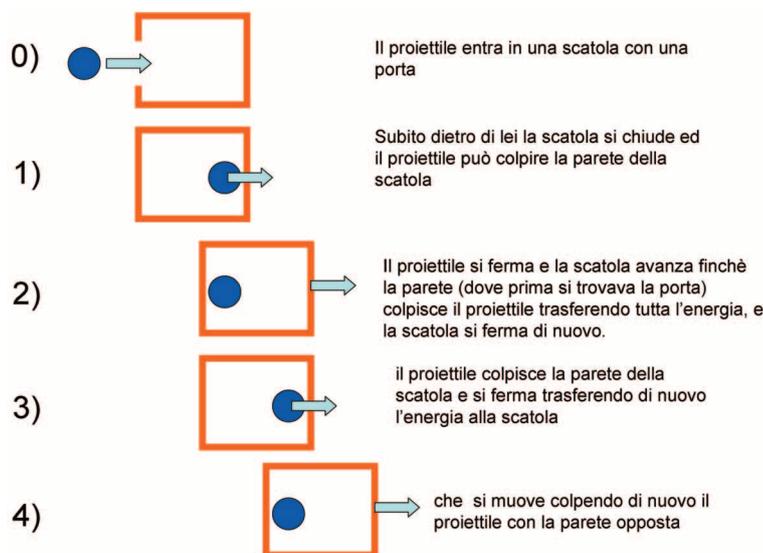


Figura 8 Comportamento del proiettile nel bersaglio in un mondo elastico (vedi testo).

Esiste un analogo elettrico di questo comportamento? Sì. Ogni collegamento elettrico può essere assimilato ad un induttore e, quindi, anche il collegamento della Figura 1 possiede un induttore implicito. In questo caso i due condensatori e l'induttore formano un oscillatore che fa sì che l'energia rimbalzi costantemente tra un condensatore all'altro (un'analogia meccanica è riportata in A.2). Un osservatore sensibile solo alla media della tensione vedrà macroscopicamente rispettata la legge della conservazione della carica, mentre un osservatore più accorto percepirà il continuo trasferimento di energia tra i due condensatori.

## Bibliografia

- Amiryar M.E. and Pullen K.R., (2017). *A review of flywheel energy storage system technologies and their applications*. Applied sciences, Special Issue Advancing Grid-Connected Renewable Generation Systems, 7(3), 286. <https://doi.org/10.3390/app7030286>
- Lange A., De Bernardis P., De Petris M. et al., (1995). *The BOOMERANG experiment*. Space Sci. Rev. 74, 145–150. <https://doi.org/10.1007/BF00751263>
- Pascale E., Boscaleri A., (2002). *Attitude control system for balloon-borne experiments*. AIP Conference Proceedings, Volume 616, pp. 56-58.
- Romeo G. e Braun T., (2007). *Appunti di Sismomentria*. Quad. Geofis. 46: 1-44. <https://istituto.ingv.it/it/le-collane-editoriali-ingv/quaderni-di-geofisica.html?anno=2007>

## Sitografia

- [https://en.wikipedia.org/wiki/Flywheel\\_energy\\_storage](https://en.wikipedia.org/wiki/Flywheel_energy_storage)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Reaction\\_wheel](https://en.wikipedia.org/wiki/Reaction_wheel)

# APPENDICI



## A1. Azionamento di un motore con recupero della frenata

Un circuito relativamente semplice con interruttori, diodi ed induttori può azionare ed arrestare un motore senza sprechi di energia. In Figura A1.1 è disegnato un circuito. Il circuito è stato simulato, accanto ai componenti appaiono le loro impedenze di Laplace (il rapporto delle trasformate di Laplace di corrente e tensione). L'induttore vale  $sL$ , mentre il motore (che abbiamo visto dalla (9) poter essere assimilato ad un condensatore) vale  $k^2/sM$ .

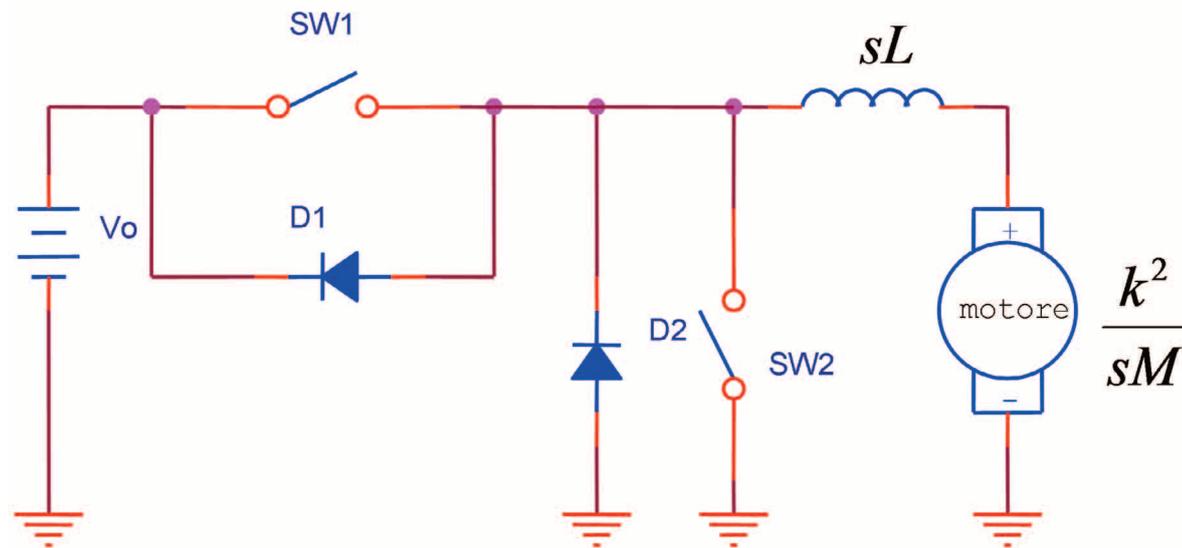
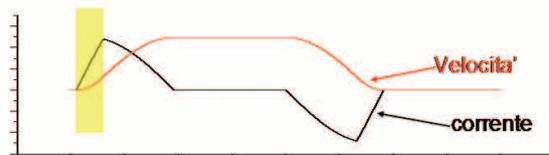
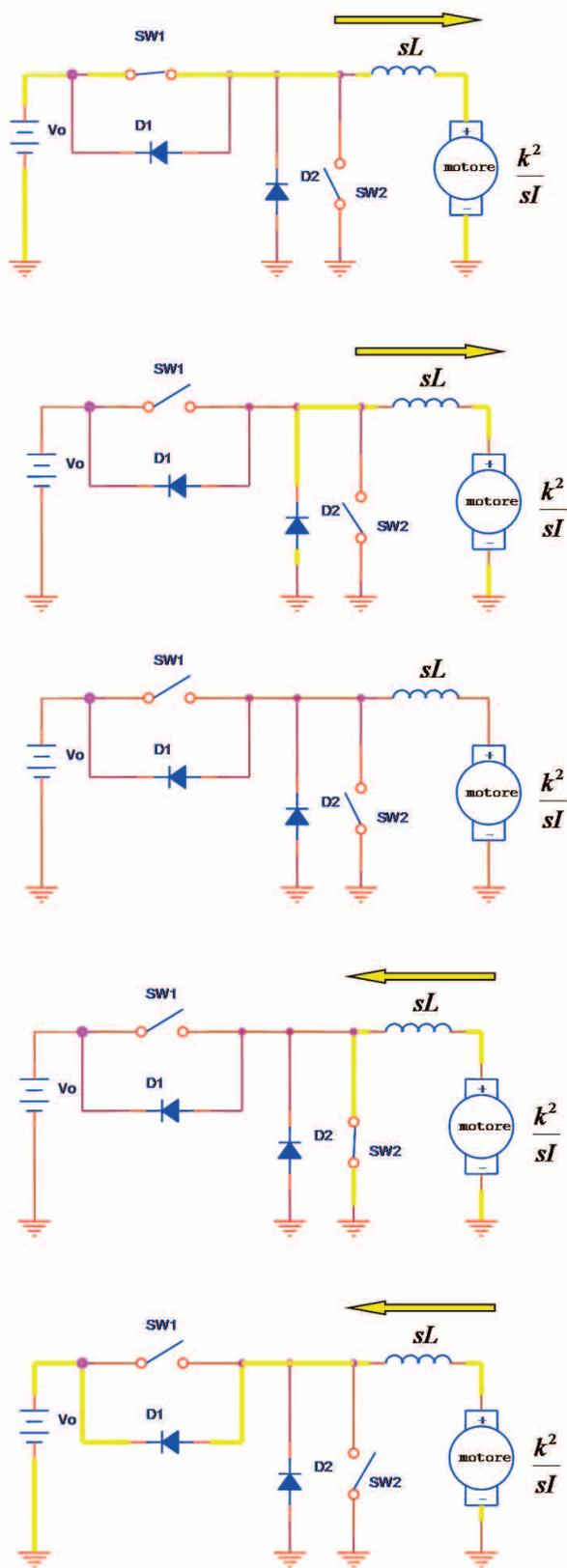
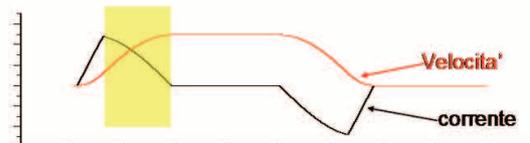


Figura A1.1 Schema di azionamento di un motore con recupero della frenata.

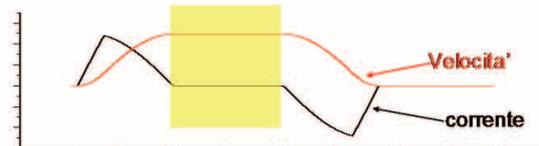
La Figura A1.2 mostra la sequenza di operazioni che portano all'azionamento del motore ed al suo arresto senza sprechi di energia. Il motore non è collegato ad un carico e non compie lavoro. Nella Figura A1.2 è stata ripetuta la Figura A1.1 cinque volte, evidenziando in giallo i tratti del circuito in cui scorre corrente mentre, a fianco di ogni circuito è riportato l'andamento temporale di corrente e velocità del motore, evidenziando il segmento temporale al quale il diagramma si riferisce. Quello che si nota è come la corrente che nella prima fase scorre dalla batteria al circuito torni dal circuito alla batteria nell'ultima fase, mostrando un completo recupero dell'energia.



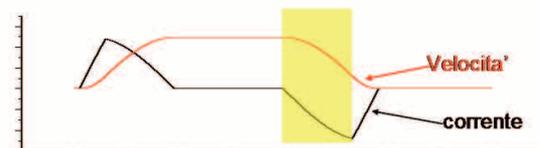
La corrente scorre dalla batteria nell'induttore e nel motore. L'induttore si carica ed il motore inizia a girare.



La corrente scorre nell'induttore e nel motore. L'induttore trasferisce energia al motore.



Il motore è libero di girare, e, senza carichi la sua velocità si mantiene indefinitamente.



La corrente scorre nell'induttore e nel motore. Il motore trasferisce energia all'induttore.

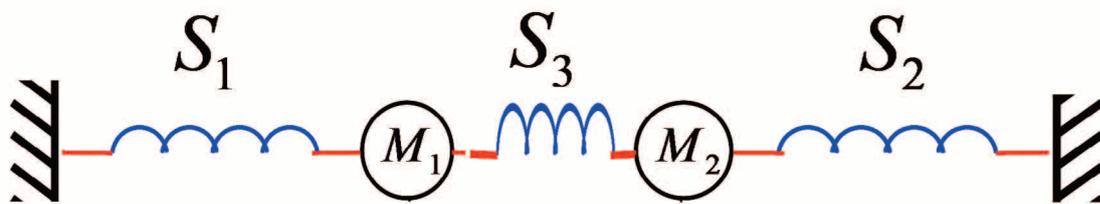


La corrente scorre nell'induttore nel motore e nella batteria. Tutta l'energia che era originariamente stata trasferita al motore torna alla batteria.

Figura A1.2 Schema di azionamento di un motore con recupero dell'energia.

## A2. Il pendolo di Newton

Come funziona il pendolo di Newton a 2 pesi? Quando i due pesi collidono si deformano meccanicamente trasformando l'energia cinetica in energia potenziale, che rilasciano subito dopo. Se il collegamento avvenisse con un ponte non elastico (potremmo mettere tra i due pendoli una gomma da masticare) avremmo solo la conservazione dell'impulso. Il comportamento elastico può essere simulato da una molla posta tra due pesi (abbiamo deciso di non fidarci dell'elasticità dei pesi stessi), ed ha un'analogia elettrica in due condensatori collegati da un induttore. Mettendo una resistenza tra i due condensatori simuleremmo una risposta non elastica (conservazione della sola carica, carica meccanicamente equivalente alla conservazione dell'impulso). Il modello che simuleremo è quello di Figura A2.1.



**Figura A2.1** Modello per lo studio del pendolo di Newton a due pesi.  $M_1 = M_2 = 1 \text{ kg}$ ;  $S_1 = S_2 = 1 \text{ N/m}$ ;  $S_3 = 10000 \text{ N/m}$ . Nella condizione raffigurata il sistema è a riposo, le masse sono ferme e non c'è energia nelle molle.

La figura mostra due masse identiche, di massa  $1 \text{ kg}$ ,  $M_1$  e  $M_2$ , collegate a due molle  $S_1$  e  $S_2$  con costante elastica  $1 \text{ N/m}$ . Il periodo di questo oscillatore è  $T=2\pi \text{ s}$ . Tra le due masse viene posta una terza molla  $S_3$  con una costante elastica  $10000$  (le costanti di  $S_1$  e  $S_2$  debbono essere trascurabili rispetto a quella di  $S_3$ ) volte più elevata che entra in contatto con le masse al momento dell'impatto e può:

1. rimanere appiccicata alle masse formando con esse un corpo unico in grado di oscillare;
2. rimanere attaccata alle masse solo finché esercita una forza repulsiva (simulando due palle che rimbalzano elasticamente);
3. essere accoppiata ad uno smorzatore che spenga le oscillazioni.

### Caso 1

$S_3$  non è collegata alle masse fino al momento in cui le masse si toccheranno, quindi possiamo spostare la massa  $M_1$  a sinistra di un metro comprimendo  $S_1$  ma non elongando  $S_3$ .  $S_3$ , una buona molla ideale, naturalmente non ha alcun peso e occupa pochissimo spazio tanto che, a riposo, le due masse praticamente si toccano (così ci ricorda il caso reale in cui sono le stesse masse a fornire la voluta risposta elastica). Al tempo  $t=1\text{s}$  rilasciamo  $M_1$ , lasciando che  $S_1$  si allunghi, accelerando la massa  $M_1$  che, dopo  $\frac{1}{4}$  del periodo di oscillazione della coppia  $S_1-M_1$  (quindi al tempo  $t=1+\pi/2$ ) colpisce e rimane appiccicata a  $S_3$ , formando un oscillatore  $M_1-S_3-M_2$  con periodo  $2\pi/\sqrt{10000}$  (in realtà avremmo dovuto considerare anche il contributo di  $S_1$  e  $S_3$ , ma il loro coefficiente elastico è così piccolo al confronto di quello di  $S_3$  che trascurarli è solo un peccato veniale). Il diagramma delle velocità delle masse  $M_1$  e  $M_2$  è riportato in Figura A2.2. Nel diagramma a sinistra al momento dell'impatto si vede l'inizio delle oscillazioni della molla  $S_3$ , visibile come una banda blu (le oscillazioni sono veloci), ed il momento dell'impatto è evidenziato nel diagramma di destra.

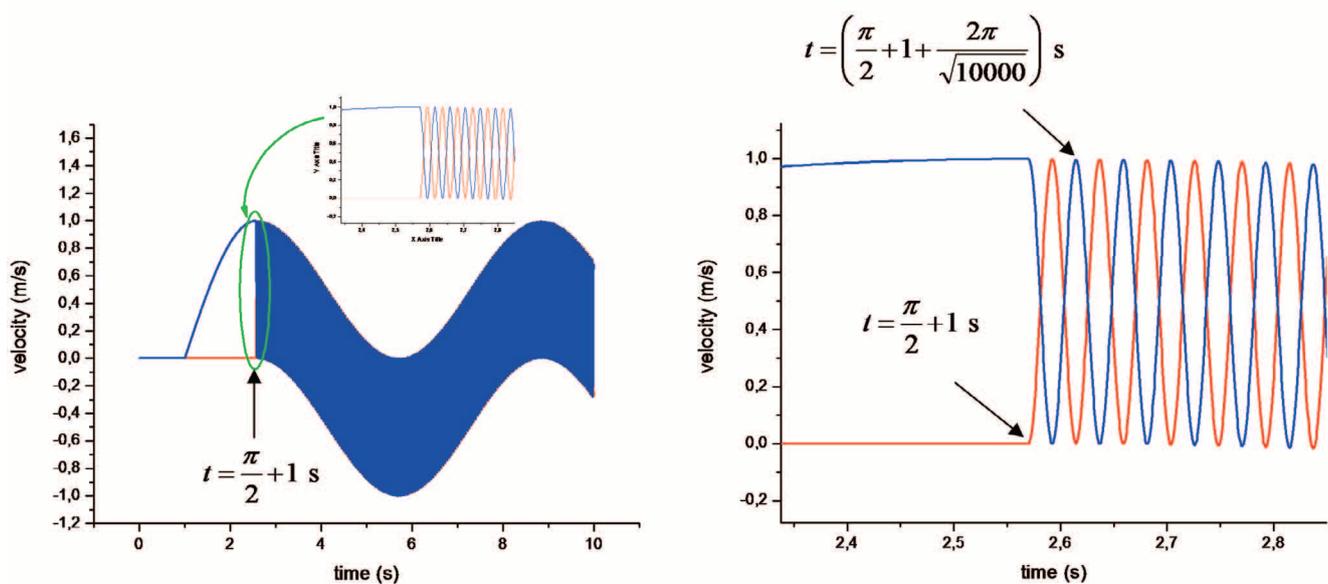


Figura A2.2 Diagramma di velocità delle masse  $M_1$  e  $M_2$  con evidenziato il momento dell'impatto.  $S_3$  non è collegata prima dell'impatto, ma rimane collegata dall'impatto in poi.

Una considerazione pratica. Se costruiamo realmente l'esperimento ed osservassimo i pendoli vedremmo delle oscillazioni come quelle riportate in Figura A2.3. Lo spostamento indotto dalle oscillazioni della molla  $S_3$  è 10000 volte più piccolo di quello indotto dalle molle  $S_1$  e  $S_2$  e, semplicemente non lo vediamo. Questa cosa ci ricorda la simulazione di un urto anelastico in un mondo elastico che abbiamo visto nel Capitolo 3.

## Caso 2

Questo è il caso della realtà delle palle del pendolo che rimbalzano. La molla  $S_3$  può esercitare solo una forza repulsiva tra le due masse, il che equivale, nella simulazione, a rimuovere la molla nel momento in cui la forza repulsiva è nulla (e questo non turba il sistema perché rimuoviamo la molla quando non vi è energia immagazzinata). Questa situazione è descritta nella Figura A2.3 che riporta le leggi orarie della posizione delle due masse.

La posizione di  $M_1$ , ( $-1m$  al momento in cui viene rilasciata) cresce fino all'impatto, e qui la velocità viene trasferita a  $M_2$  che praticamente prosegue la traiettoria che avrebbe fatto  $M_1$  se non ci fosse stato alcun impatto. Il trasferimento di energia avviene attraverso  $S_3$ , ed è descritto in Figura A2.4. A sinistra, in Figura 2.4 appare il diagramma delle energie nelle varie parti del sistema. Prima di  $t=1$  tutta l'energia è contenuta nella molla  $S_1$  elongata di  $-1m$ . Quando la molla viene rilasciata l'energia comincia a trasferirsi nella massa  $M_1$ , e al punto di impatto è tutta contenuta in  $M_1$ . Quello che succede al momento dell'impatto è visibile nel diagramma di destra della figura. L'energia di  $M_1$  viene trasferita in  $M_2$  attraverso  $S_3$ . Il collegamento di  $S_3$  viene rimosso non appena l'energia immagazzinata è nulla, momento in cui tutta l'energia è stata trasferite in  $M_2$ . Questo fenomeno avviene in un tempo paragonabile al semiperiodo dell'oscillatore  $M_1-L_3-M_2$ .

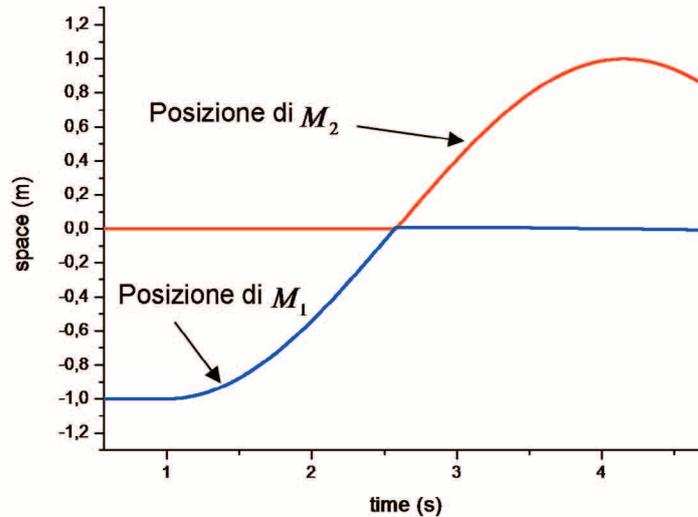


Figura A2.3 Diagramma orario della posizione delle due masse. Al momento dell’impatto la velocità di  $M_1$  viene trasferita a  $M_2$  in un tempo dipendente dalla costante elastica di  $S_3$ .

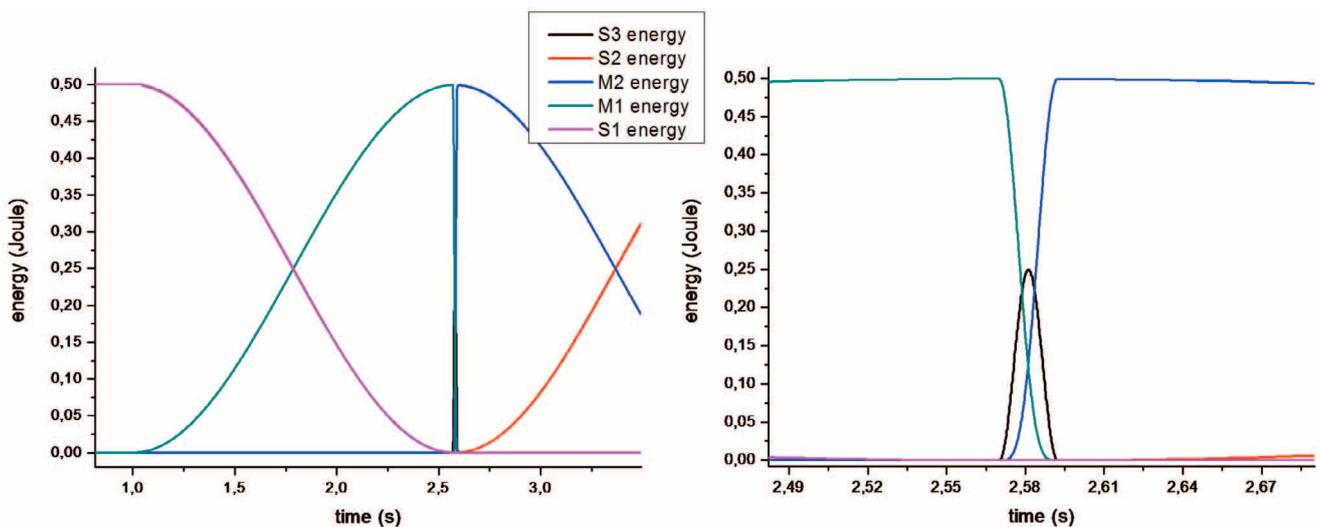


Figura A2.4 Andamento delle energie nelle parti del modello elastico, con rimozione dell’accoppiamento elastico dopo l’impatto. A destra è evidenziato il momento del trasferimento dell’energia da  $M_1$  a  $M_2$  attraverso  $S_3$ .

## Caso 3

Al posto di  $S_3$  mettiamo un mezzo anelastico ed appiccicoso: quando le masse si toccano non rimbalzano, ma rimangono legate. Nella Figura A2.5 sono mostrati i diagrammi dell'energia al momento dell'impatto delle masse e del mezzo anelastico interposto tra le due masse. Al momento dell'impatto tutta l'energia è contenuta nella massa  $M_1$  ( $E = M_1 v^2 / 2 = 0.5J$ ). Metà dell'energia viene dissipata sul mezzo anelastico (traccia rossa) e la rimanente energia è equipartita tra le due masse.

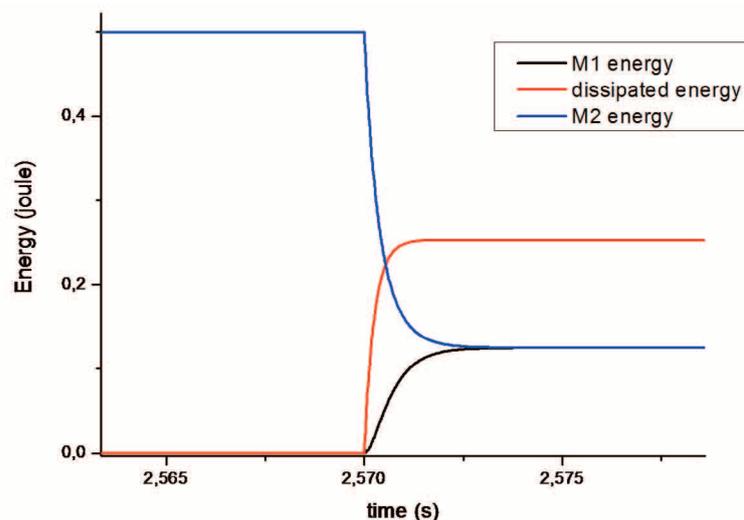


Figura A2.5 Spartizione delle energie al momento dell'impatto anelastico; metà energia si dissipa nel mezzo anelastico che accoppia le due masse. L'altra metà viene equipartita come energia cinetica delle masse.

## Conclusioni

L'articolo è una raccolta di considerazioni sul trasferimento energetico in semplici schemi sia elettrici che meccanici. Gli argomenti trattati sono di carattere generale, e non sembrano aver una ricaduta diretta sui temi geofisici. Hanno però una ricaduta tecnologica, laddove il risparmio energetico sia un vincolo importante per la conduzione di esperimenti. Questo è particolarmente vero per osservazioni da pallone stratosferico o da stazioni abissali quando l'efficienza energetica è direttamente collegata al costo o addirittura alla realizzabilità dell'esperimento.

Questo è sintetizzato bene nella figura A1.2, che illustra un semplice sistema di recupero energetico. Qui viene azionato ed arrestato un motore applicato ad un carico inerziale, come si usa nel controllo di assetto dei palloni stratosferici, e l'idea di scrivere questa nota deriva proprio dal lavoro fatto per rendere minimo il consumo di questi sistemi. In generale è stato mostrato come l'uso di accoppiamenti elastici (in meccanica) ed induttori (in elettronica) riesca a contrastare l'apparente energofagia di costruzioni ingannevolmente semplici.



# QUADERNI di GEOFISICA

ISSN 1590-2595

<http://istituto.ingv.it/le-collane-editoriali-ingv/quaderni-di-geofisica.html/>

I QUADERNI DI GEOFISICA (QUAD. GEOFIS.) accolgono lavori, sia in italiano che in inglese, che diano particolare risalto alla pubblicazione di dati, misure, osservazioni e loro elaborazioni anche preliminari che necessitano di rapida diffusione nella comunità scientifica nazionale ed internazionale. Per questo scopo la pubblicazione on-line è particolarmente utile e fornisce accesso immediato a tutti i possibili utenti. Un Editorial Board multidisciplinare ed un accurato processo di peer-review garantiscono i requisiti di qualità per la pubblicazione dei contributi. I QUADERNI DI GEOFISICA sono presenti in "Emerging Sources Citation Index" di Clarivate Analytics, e in "Open Access Journals" di Scopus.

QUADERNI DI GEOFISICA (QUAD. GEOFIS.) welcome contributions, in Italian and/or in English, with special emphasis on preliminary elaborations of data, measures, and observations that need rapid and widespread diffusion in the scientific community. The on-line publication is particularly useful for this purpose, and a multidisciplinary Editorial Board with an accurate peer-review process provides the quality standard for the publication of the manuscripts. QUADERNI DI GEOFISICA are present in "Emerging Sources Citation Index" of Clarivate Analytics, and in "Open Access Journals" of Scopus.

# RAPPORTI TECNICI INGV

ISSN 2039-7941

<http://istituto.ingv.it/le-collane-editoriali-ingv/rapporti-tecnici-ingv.html/>

I RAPPORTI TECNICI INGV (RAPP. TEC. INGV) pubblicano contributi, sia in italiano che in inglese, di tipo tecnologico come manuali, software, applicazioni ed innovazioni di strumentazioni, tecniche di raccolta dati di rilevante interesse tecnico-scientifico. I RAPPORTI TECNICI INGV sono pubblicati esclusivamente on-line per garantire agli autori rapidità di diffusione e agli utenti accesso immediato ai dati pubblicati. Un Editorial Board multidisciplinare ed un accurato processo di peer-review garantiscono i requisiti di qualità per la pubblicazione dei contributi.

RAPPORTI TECNICI INGV (RAPP. TEC. INGV) publish technological contributions (in Italian and/or in English) such as manuals, software, applications and implementations of instruments, and techniques of data collection. RAPPORTI TECNICI INGV are published online to guarantee celerity of diffusion and a prompt access to published data. A multidisciplinary Editorial Board and an accurate peer-review process provide the quality standard for the publication of the contributions.

# MISCELLANEA INGV

ISSN 2039-6651

[http://istituto.ingv.it/le-collane-editoriali-ingv/miscellanea-ingv.html](http://istituto.ingv.it/le-collane-editoriali-ingv/miscellanea-ingv.html/)

MISCELLANEA INGV (MISC. INGV) favorisce la pubblicazione di contributi scientifici riguardanti le attività svolte dall'INGV. In particolare, MISCELLANEA INGV raccoglie reports di progetti scientifici, proceedings di convegni, manuali, monografie di rilevante interesse, raccolte di articoli, ecc. La pubblicazione è esclusivamente on-line, completamente gratuita e garantisce tempi rapidi e grande diffusione sul web. L'Editorial Board INGV, grazie al suo carattere multidisciplinare, assicura i requisiti di qualità per la pubblicazione dei contributi sottomessi.

MISCELLANEA INGV (MISC. INGV) favours the publication of scientific contributions regarding the main activities carried out at INGV. In particular, MISCELLANEA INGV gathers reports of scientific projects, proceedings of meetings, manuals, relevant monographs, collections of articles etc. The journal is published online to guarantee celerity of diffusion on the internet. A multidisciplinary Editorial Board and an accurate peer-review process provide the quality standard for the publication of the contributions.

**Coordinamento editoriale**

Francesca DI STEFANO  
Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

**Progetto grafico**

Barbara ANGIONI  
Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

**Impaginazione**

Barbara ANGIONI  
Patrizia PANTANI  
Massimiliano CASCONI  
Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

©2022

Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia  
Via di Vigna Murata, 605  
00143 Roma  
tel. +39 06518601

[www.ingv.it](http://www.ingv.it)



Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

